ハミルトン系の非可積分性の判定条件(ハミルトン力学系,ハミルトン力学系とカオス,研究会報告)

AUTHOR(S):

吉田, 春夫

ハミルトン系の非可積分性の判定条件

吉田春夫
181-8588 東京都三鷹市大沢 2-21-1 国立天文台
yoshida@gauss.mtk.nao.ac.jp

1 はじめに

運動方程式の解に対して，値が一定となる関数を第一積分（積分，保存量）と言う．例えばハミルトニアン自身，Hamilton 方程式の第一積分である．自由度 n の Hamilton 系ではハミルトニアン以外に $(n-1)$ 個の包合系をなす一価の第一積分が存在するとき積分可能であると言われる．積分可能な Hamilton 系では解は実際に求積操作によって求められる．そこで当然

Hamilton 力学系の基本問題

与えられた Hamilton 系の積分可能，不可能性を判定せよ．

という問題意識がわき起こるが，今日の我々の知識はこの基本問題の解決には程遠い．

自由度１の系は常に積分可能である．よって積分可能性が問題となるのは自由度２の系以上である．その自由度２の Hamilton 系ではただ１つの独立な積分$\Phi =$ const.の存在が積分可能性を意味する．そしてこの最も簡単な自由度２の場合においてすら「基本問題」に対する解答は知られていない．話をより具体的にするために，１つのパラメータϵを含む自由度２の Hamilton 系

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^4 + q_2^4) + \frac{\epsilon}{2}q_1^2 q_2^2 \tag{1}$$

を考える．この系は４次の同次式ポテンシャル中の質点の運動を記述し，$\epsilon = 0, 1, 3$ の時に積分可能である．実際

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 \quad &: \quad \Phi = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{4}q_1^4 \\ \epsilon = 1 \quad &: \quad \Phi = q_1 p_2 - q_2 p_1 \\ \epsilon = 3 \quad &: \quad \Phi = p_1 p_2 + q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2) \end{aligned}$$

が各々の場合のハミルトニアンと独立な第一積分であることは簡単にチェックできる．しかし他のϵに対しても第一積分が存在するかもしれない．つまり積分可能性を納得することは容易だが（但し発見は一般に困難である），その逆の積分不可能性を納得するのは別の次元の話となるわけである．つまり当然の問いかけとして次の問題が提起される．

問題１

Hamilton 系 (1) において，すべての積分可能なϵの値を決定せよ．

古典的な「解析力学」における種々の方法論は残念ながらこの種の問題に対して無力であった．その解答が得られるようになったのはここ１０年ぐらいの間である．そこでは約１世紀前に起源を持つ「特異点解析」が重要な役割を果たした．本稿はこの特異点解析についての歴史的事実から始めて，非可積分性の判定条件の最新かつ最強のバージョンを紹介することを目的とする．

2 特異点解析

2.1 コワレフスカヤのコマ

重力の作用下での固定点の周りの剛体の運動（コマの運動）は Euler-Poisson の方程式

$$
\begin{aligned}
A\frac{d\omega_1}{dt} &= (B-C)\omega_2\omega_3 + z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3 \\
B\frac{d\omega_2}{dt} &= (C-A)\omega_3\omega_1 + x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1 \\
C\frac{d\omega_3}{dt} &= (A-B)\omega_1\omega_2 + y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

によって記述される．この系はパラメータ (A,B,C,x_0,y_0,z_0) の任意の値に対して共通に 3 個の第一積分を持つ．そして 4 番目の積分の存在が系の積分可能性を意味する．19 世紀の末，1889 年の時点において 4 番目の第一積分が見つかっていたのは

$$(a)\ \ x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad (b)\ \ A = B,\ x_0 = y_0 = 0$$

の 2 つの場合だけであった．これらはそれぞれ Euler の場合， Lagrange の場合と呼ばれる．

1889 年 S. Kowalevski はこの Euler-Poisson 方程式の新たな積分可能な場合を発見した．その時に用いられたアイデア，手法が特異点解析である．Euler, Lagrange の場合ともに解は時間 t の楕円関数で表され，いずれの場合も有理型関数である．そして解の複素 t 平面における特異点は極（pole）以外にない．そして解はこれらの特異点の近傍で十分な数の任意定数を含む Laurent 級数展開が可能となる．そこで Kowalevski は，逆にどのようなパラメータの値に対してこの「特異点が極のみ」という性質を解が持ちうるかに着目した．そして，ある具体的な計算によって先の Euler, Lagrange の場合以外の唯一の可能性が

$$(c)\ \ A = B = 2C,\ y_0 = z_0 = 0$$

であることを示した．そしてこのパラメータ値に対して Euler-Poisson 方程式 (2) の 4 番目の第一積分を「発見」し，実際に楕円関数の本質的な拡張である種数 (genus) 2 の超楕円関数による一般解の表現を得た．この積分可能系は Kowalevski のコマ（コワレフスカヤのコマ）と呼ばれている．

2.2 特異点解析の例

ここでは Hamilton 系 (1) に対して特異点解析を実行し，既知の積分可能な場合のパラメータ値$\epsilon = 0,1,3$ の特殊性を実感することにしよう．ハミルトニアン (1) から導かれる q_1, q_2についての微分方程式は

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} = -q_1(q_1^2 + \epsilon q_2^2), \quad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -q_2(q_2^2 + \epsilon q_1^2) \tag{3}$$

である．今，解$q = q(t)$ が $t = t_0$に特異点を持つとしよう．$t - t_0$を改めて t と置いても微分方程式は変わらないから，常に $t = 0$ に特異点があると考えて良い．$t = 0$ で特異点をもつ (3) の最も簡単な解は

$$q_1 = d_1 t^{-1},\ \ q_2 = d_2 t^{-1} \tag{4}$$

の形をしたものである．ここで d_1および d_2は連立代数方程式

$$2d_1 = -d_1(d_1^2 + \epsilon d_2^2),\ \ 2d_2 = -d_2(d_2^2 + \epsilon d_1^2) \tag{5}$$

の解である．この代数方程式には本質的に2つの異なる解の組がある．それは

$$d_1 = 0,\ \ d_2 = \pm\sqrt{-2} \tag{6}$$

および

$$d_1 = \pm\sqrt{\frac{-2}{1+\epsilon}},\ \ d_2 = \pm\sqrt{\frac{-2}{1+\epsilon}} \tag{7}$$

である．これらの係数d_1, d_2が虚数となることは，運動方程式の解の特異点がtの実軸上には現れないことの一つの帰結である．

特殊解 (4) を展開の主要項とし，展開係数に任意定数を含む解の展開を得るために，e_1およびe_2を定数とする

$$q_1 = d_1 t^{-1} + e_1 t^{-1+\rho},\ \ q_2 = d_1 t^{-1} + e_2 t^{-1+\rho} \tag{8}$$

の形の解を考えよう．実際 (8) を微分方程式 (3) に代入し，e_1, e_2の2次以上の項を無視すればe_1, e_2についての線形方程式

$$\begin{pmatrix} (\rho-1)(\rho-2)+3d_1^2+\epsilon d_2^2 & 2\epsilon d_1 d_2 \\ 2\epsilon d_1 d_2 & (\rho-1)(\rho-2)+3d_2^2+\epsilon d_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

が得られる．この線形方程式が非自明な解を持つために係数行列式が0となる条件は主要項 (6) に対しては

$$(\rho+1)(\rho-4)\left(\rho^2 - 3\rho + 2(1-\epsilon)\right) = 0 \tag{10}$$

という4次方程式になり，主要項 (7) に対しては

$$(\rho+1)(\rho-4)\left(\rho^2 - 3\rho - 4\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right) = 0 \tag{11}$$

となる．この方程式の4つの根をρ_iと記し（但し$\rho_3 = 4, \rho_4 = -1$とする），(8) では省略された高次の非線形項も含むことによって最終的には微分方程式 (3) に対する

$$q_i = t^{-1}\left[d_i + f_i\left(I_1 t^{\rho_1}, I_2 t^{\rho_2}, I_3 t^{\rho_3}\right)\right],\ \ (i = 1, 2) \tag{12}$$

の形の解の展開が得られる．ここでI_1, I_2, I_3は3つの任意定数，そして$f_i(x, y, z)$はx, y, zについての Taylor 級数を表す．指数ρ_iはパラメータϵの値に依存し一般には複素数となり得るから，展開 (12) は必ずしも Laurent 展開とはならない．展開 (12) が Laurent 展開，すなわち特異点が極となり解はその周りで一価となるためには指数ρ_1およびρ_2が2つの主要項 (6), (7) に対して共に整数とならなければならない．(10), (11) からこれが可能となるのは$\epsilon = 0, 1, 3$の時のみであることが容易に確かめられる．そしてこれらのϵの値に対しては系 (1) は実際に積分可能であり，ハミルトニアンと独立な多項式の第一積分が存在している．

Kowalevski は以上に述べた計算と本質的に同じ手続きによって Euler-Poisson 方程式 (2) に対して (a) Euler, (b) Lagrange, (c) Kowalevski の場合を特徴づけた．そして (c) Kowalevski の場合に「幸いにも」4番目の第一積分を発見し系を求積にと導いたのである．実は同じような例題，すなわちパラメータを含む Hamilton 系で特異点解析によって選別されたパラメータ値が積分可能な場合となっている例は数多く存在している．いくつかの新しい積分可能系が特異点解析によって「発見」すらされている．そこで当然問題となるのがこの特異点解析と積分可能・不可能性の間の厳密な論理的関係である．

2.3 特異点解析の正当化に関する既知の結果

特異点解析の要点は 4 次式 (10), (11) の根として得られる指数ρ_iがすべて実整数となることを要請していることである．これらの指数ρ_iをその歴史的理由から Kowalevski 指数（Kowalevski Exponent, KE）と呼ぶことにしよう．無理数や虚数の KE は実整数の KE の対極にある．

一般にk次の同次式ポテンシャル $V(q_1, q_2)$ を持つ自由度 2 の Hamilton 系（但し $k \neq 0, \pm 2$）

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2) \tag{13}$$

に対して，

定理 1

Hamilton 系 (13) が積分可能 $\Rightarrow$ すべての KE は有理数

となることが証明できる [7]．つまり実整数の対極にある無理数や虚数の KE の存在は系の積分不可能性を意味する．また一般に自由度 n の同次式 Hamilton 系においては互いにペアーをなす KE の組みρ_i, ρ_{i+n}の差，$\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i+n}$に対して

定理 2

$\Delta\rho_i$が有理数体上一次独立 $\Rightarrow$ ハミルトニアンと独立な解析的第一積分は存在しない

ことが証明できる [7]．また特に自由度 2 の同次式 Hamilton 系 (13) においては，より強力な主張ができる．(13) に対して代数方程式 $\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$の解$\boldsymbol{c}$を一つ固定しヘッシアン行列 $D^2V(\boldsymbol{c})$ の固有値をλと $k-1$ とする．この時 [6],

定理 3

Hamilton 系 (13) が積分可能 $\Rightarrow 0 \leq \lambda \leq 1,\ k-1 \leq \lambda \leq k+2,\ 3k-2 \leq \lambda \leq 3k+3, \ldots$

以上の定理は，(i) 系の直線解の周りの変分方程式が Gauss の超幾何方程式に変換されることによって変分方程式のモノドロミー行列のあらわな表現が可能になるという事実，及び (ii) 系の積分可能性とモノドロミー行列の可換性を関連づける Ziglin の定理 [9]，に基づいている．

我々の例 (1) に対して定理 3 を適用すると，$\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}$の 2 つの解に対する $D^2V(\boldsymbol{c})$ の固有値$\lambda = \epsilon$および$\lambda = (3-\epsilon)/(1+\epsilon)$ が共に $k = 4$ と置いて得られる領域

$$0 \leq \lambda \leq 1,\ 3 \leq \lambda \leq 6,\ 10 \leq \lambda \leq 15, \ldots$$

に入るという条件から

問題 1 の解

Hamilton 系 (1) は$\epsilon = 0, 1, 3$ の時のみ積分可能

であることが結論される．しかしより一般の系ではこうはいかず，Hamilton 系 (1) は定理 3 にとって幸運な例といえる．また特異点解析の正当化という観点からは，証明が「間接的」であるがゆえに，やや不満が残る．以上の既知の結果についてはレビュー論文 [5] や単行本 [10] の 5 章が詳しい．

3　新しい結果：Picard-Vessiot 理論に基づく判定条件

3.1　変分方程式として得られる Gauss の超幾何方程式

自由度 2 の同次式ポテンシャル系 (13) は常に直線解

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c}\phi(t),\ \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}\dot{\phi}(t) \tag{14}$$

を持つ．ここで$\phi(t)$ は

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \phi^{k-1} = 0 \tag{15}$$

を満たす関数であり，$\boldsymbol{c}$は代数方程式

$$\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \tag{16}$$

の解である．(13) を直線解 (14) の周りで線形化して得られる変分方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{\xi}}{dt^2} + \phi(t)^{k-2}D^2V(\boldsymbol{c})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{17}$$

となる．ここで $D^2V(\boldsymbol{c})$ は $V(\boldsymbol{q})$ のヘッシアン行列を点$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c}$で評価したものである．適当な座標回転 $(\xi_1,\xi_2) \to (\xi_1',\xi_2')$ によってヘッシアン行列 $D^2V(\boldsymbol{c})$ は対角化される．さらに $(k-1)$ は $D^2V(\boldsymbol{c})$ の，$\boldsymbol{c}$を固有ベクトルとする固有値であることがわかるので，対角化後の変分方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{\xi}'}{dt^2} + \phi(t)^{k-2}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}' = 0 \tag{18}$$

となる．この第一の成分

$$\frac{d^2\xi_1'}{dt^2} + \lambda\phi(t)^{k-2}\xi_1' = 0 \tag{19}$$

は直線解 (14) に「直交」する変分を記述するので，直交変分方程式 (Normal Variational Equation, NVE) と呼ばれる．今，最初から直線解が $q_1 = p_1 = 0$ で与えられているとする．この時，NVE は autonomous な表現で

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \eta_1, & \frac{d\eta_1}{dt} &= -\lambda q_2^{k-2}\xi_1 \\ \frac{dq_2}{dt} &= p_2, & \frac{dp_2}{dt} &= -q_2^{k-1} \end{aligned} \tag{20}$$

と書ける．ただし直線運動の「エネルギー」は

$$\frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{k}q_2^k = \text{const.} = \frac{1}{k} \tag{21}$$

に固定する．独立変数の変換 $t \to z$を

$$z = q_2^k \tag{22}$$

によって行えば，NVE (20) は

$$z(1-z)\frac{d^2\xi_1}{dz^2} + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{3k-2}{2k}z\right)\frac{d\xi_1}{dz} + \frac{\lambda}{2k}\xi_1 = 0 \tag{23}$$

に変換される．これは Gauss の超幾何方程式

$$z(1-z)\frac{d^2\xi}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{d\xi}{dz} - ab\xi = 0 \tag{24}$$

でパラメータを

$$a+b=\frac{1}{2}-\frac{1}{k},\ ab=-\frac{\lambda}{2k},\ c=1-\frac{1}{k} \tag{25}$$

としたものでる．

いま元のハミルトン系 (13) が積分可能であると仮定し，少なくとも考える直線解 $q_1=p_1=0$ の近傍で解析的な第一積分

$$\Phi(q,p)=\mathrm{const.} \tag{26}$$

を有するとする．このとき常に変分方程式の第一積分

$$I=D^m\Phi:=\left(\xi\frac{\partial}{\partial q}+\eta\frac{\partial}{\partial p}\right)^m\Phi(q,p)=\mathrm{const.} \tag{27}$$

が存在する．この量は$\Phi(q+\xi,p+\eta)$ を $q_1=p_1=0$ の周りでテイラー展開した時に 0 とならないξ,ηについての最低次の項に他ならない．さらに$\Phi(q,p)$ がハミルトニアン $H(q,p)$ と独立であるという仮定から，この第一積分は直交変分方程式の第一積分と仮定できる．つまり (27) は

$$I=I(q_2,p_2,\xi_1,\eta_1)=\mathrm{const.} \tag{28}$$

の形に書ける．積分 (28) は変数変換 (22) の後では，Gauss の超幾何方程式 (23) の第一積分と解釈でき，それはまた$\xi=\xi_1(z)$ についての 1 階の非線形常微分方程式でもある．驚くことにこの非線形常微分方程式は簡単に解け，Gauss の超幾何方程式 (23) の解

$$\xi=\exp\left[\int\zeta(z)dz\right] \tag{29}$$

を与えてしまう．ここで$\zeta(z)$ は $I(q_2,p_2,\xi_1,\eta_1)$ によって決まる多項式 $f_j(z)$ を係数とする代数方程式

$$f_0(z)\zeta^n+f_1(z)\zeta^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(z)\zeta+f_n(z)=0 \tag{30}$$

の解，つまり zの代数関数である．つまり Gauss の超幾何方程式 (23) の解が「代数方程式を解く演算」,「不定積分演算」,「指数関数演算」，という 3 つの初等的な演算の合成のみで得られることになる．要約すると

定理 4

Hamilton 系 (13) が積分可能 $\Rightarrow$ Gauss の超幾何方程式 (23) は初等的に解ける

この定理は Morales-Ruiz and Ramis [3] で微分ガロア理論の言葉を用いたより一般的な結果として主張されているものだが，筆者の理解をはるかに越えているため上に述べた方針による自家製の初等的な証明を [8] において与えた．そこではさらに第一積分 (28) の持つ 3 つの特徴，

- Iは変数 (ξ_1,η_1) について同次の多項式であること，
- Iは相似変換に付随するウエイトについて同次の多項式であること，
- Iは変数 (p_2,η_1) について偶関数または奇関数であること，

をフルに利用している．

3.2 例題

定理 4 の主張を実感するための例を一つあげる．k次の同次多項式，

$$V_k = \frac{1}{kr}\left[\left(\frac{r+q_2}{2}\right)^{k+1} + (-1)^k\left(\frac{r-q_2}{2}\right)^{k+1}\right], \quad r = \sqrt{q_1^2+q_2^2} \tag{31}$$

をポテンシャルとするハミルトン系 (13) は放物線座標で変数分離可能で積分可能である．そして独立な第一積分Φ_kは

$$\Phi_k = p_1(q_1p_2 - q_2p_1) + \frac{k-1}{2k}q_1^2V_{k-1} \tag{32}$$

で与えられる [4]．ポテンシャル V_kの具体的な形は

$$V_3 = \frac{1}{24}(4q_1^2q_2 + 8q_2^3) \tag{33}$$
$$V_4 = \frac{1}{64}(q_1^4 + 12q_1^2q_2^2 + 16q_2^4) \tag{34}$$
$$V_5 = \frac{1}{160}(6q_1^4q_2 + 32q_1^2q_2^3 + 32q_2^5) \tag{35}$$

である．直線解 $q_1 = p_1 = 0$ の周りの直交変分方程式は，(13) で$\lambda = (k-1)/2k$とおいたものである．$\Phi_k = \text{const.}$ から導かれる NVE の第一積分は

$$I = D^2\Phi_k = \frac{1}{k}q_2^{k-1}\xi_1^2 + 2p_2\xi_1\eta_1 - 2q_2\eta_1^2 = \text{const.} \tag{36}$$

であり，変数変換 (22) によって Gauss の超幾何方程式の積分

$$D^2\Phi_k = z^{\frac{k-1}{k}}\left[\frac{1}{k}\xi^2 + 4(1-z)\xi\frac{d\xi}{dz} - 4kz(1-z)\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2\right] = \text{const.} \tag{37}$$

と解釈される．$\zeta = d(\log\xi)/dz$の満たす代数方程式は

$$4kz(1-z)\zeta^2 - 4(1-z)\zeta - \frac{1}{k} = 0 \tag{38}$$

であり，この 2 次方程式の解

$$\zeta(z) = \frac{1}{2kz}\left[1 \pm (1-z)^{-1/2}\right] \tag{39}$$

から (29) で得られる

$$\xi = \exp\left[\int\zeta(z)dz\right] = \left[1 \mp \sqrt{1-z}\right]^{\frac{1}{k}} \tag{40}$$

が実際に Gauss の超幾何方程式 (23) の解を与えていることが確認できる．

3.3 木村の定理を利用した新しい判定条件

1969 年，木村俊房（T. Kimura）は Galois 理論の微分方程式版とも言える Picard-Vessiot 理論に基づいて，Gauss の超幾何方程式が「初等的に解ける」ための必要かつ十分な条件を得た．複素数体上の有理関数全体からなる体 Kに考える線形微分方程式の解を付加して得られる体（微分体）L を体 Kの Picard-Vessiot 拡大という．また一般に体 Kから始めて，代数方程式を解く演算，不定積分演算，指数関数演算，の有限の繰り返しを加えることによって得られる体 L は体 Kの「一般化された Liouville 拡大」と呼ばれる．

いま$\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$は Gauss の超幾何方程式の確定特異点 $z=0,1,\infty$ における exponent の差

$$\hat{\lambda}=1-c,\ \ \hat{\mu}=c-a-b,\ \ \hat{\nu}=a-b \tag{41}$$

を表すとする．木村によって得られた定理は [1]

木村の定理

Gauss の超幾何方程式による，有理関数体 Kの Picard-Vessiot 拡大 L が，体 Kの一般化された Liouville 拡大となるための必要かつ十分な条件は

- $\hat{\lambda}\pm\hat{\mu}\pm\hat{\nu}$の少なくとも一つが奇整数である，または
- $\pm\hat{\lambda}, \pm\hat{\mu}, \pm\hat{\nu}$が勝手な順序で Schwarz-福原-大橋の表の値をとる．

である．Schwarz-福原-大橋の表は以下に与えられる．(l, m, n は任意の整数)

1	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{2}+m$	任意	
2	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	
3	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l+m+n=$ 偶数
4	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{4}+n$	
5	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{4}+m$	$\frac{1}{4}+n$	$l+m+n=$ 偶数
6	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	
7	$\frac{2}{5}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l+m+n=$ 偶数
8	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
9	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
10	$\frac{3}{5}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
11	$\frac{2}{5}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{2}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
12	$\frac{2}{3}+l$	$\frac{1}{3}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
13	$\frac{4}{5}+l$	$\frac{1}{5}+m$	$\frac{1}{5}+n$	$l+m+n=$ 偶数
14	$\frac{1}{2}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l+m+n=$ 偶数
15	$\frac{3}{5}+l$	$\frac{2}{5}+m$	$\frac{1}{3}+n$	$l+m+n=$ 偶数

この木村の定理は Gauss の超幾何方程式の解が，有理関数から始めて代数方程式を解く演算，不定積分演算，および指数関数演算のみによって初等的に得られるための必要十分条件を与えている．よって定理 4 から積分可能性の必要条件が直ちに導かれる．

直交変分方程式として得られた Gauss の超幾何方程式 (23) において exponent の差 (41) は

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{k},\ \ \hat{\mu}=\frac{1}{2},\ \ \hat{\nu}=\frac{\sqrt{(k-2)^2+8k\lambda}}{2k} \tag{42}$$

である．木村の定理の最初の条件，つまり$\hat{\lambda}\pm\hat{\mu}\pm\hat{\nu}$の少なくとも一つが奇整数である，という条件は

$$\lambda=j+j(j-1)k/2=\{0,1,k-1,k+2,3k-2,\ldots\} \tag{43}$$

という条件に翻訳される．また Schwarz-福原-大橋の表の第 1 行から，$k=\pm 2$ ならば任意のλが許されることがわかる．さらに任意の kにおいて，$\hat{\nu}=1/2+$ 整数 となるようなλが許される値であることが分かるが，これは

$$\lambda=\frac{k-1}{2k}+j(j-1)k/2=\left\{\frac{(k-1)}{2k},\frac{(k-1)}{2k}+k,\frac{(k-1)}{2k}+3k,\ldots\right\} \tag{44}$$

という条件を与える．$k=\pm3,\pm4,\pm5$ の場合を除けばこれ以外の可能性はない．すなわち

定理 5

系 (13) が積分可能⇒ $\lambda \in \{0,1,k-1,k+2,3k-2,\dots\} \cup \left\{\frac{(k-1)}{2k}, \frac{(k-1)}{2k}+k, \frac{(k-1)}{2k}+3k,\dots\right\}$

この定理は Morales and Ramis [2] によって初めて得られた．$k=\pm3,\pm4,\pm5$ のときは Schwarz-福原-大橋の表に適合するλの値はより多くなる．例えば $k=4$ の時，定理 5 で許される

$$\{0,1,3,6,10,\dots\} \cup \left\{\frac{3}{8},\frac{35}{8},\frac{99}{8},\frac{195}{8},\dots\right\} \tag{45}$$

に加えて Schwarz-福原-大橋の表の第 4 行から

$$\lambda = -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}+4j\right)^2 = \left\{\frac{7}{72},\frac{55}{72},\frac{247}{72},\frac{391}{72},\dots\right\} \tag{46}$$

が可能な値となる．いずれにせよ定理 3 はより強力な定理 5 に，とって代わられることになった．

3.4 特異点解析における帰結

定理 5 は特異点解析の正当化において，より重要な意味を持つ．特異点解析で出発点となった特殊解 (4) は，より一般の k次の同次式ポテンシャル系 (13) における

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{d}t^{-g},\ \ \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{d}gt^{-g-1},\ \ g := \frac{2}{k-2} \tag{47}$$

に自然に拡張される．ここで$\boldsymbol{d}$は代数方程式

$$\nabla V(\boldsymbol{d}) = -g(g+1)\boldsymbol{d} \tag{48}$$

の解である．特殊解 (47) と直線解 (14) は 1 対 1 に対応している．実際 2 つの代数方程式 (48) と (16) の解は

$$\boldsymbol{d} = [-g(g+1)]^{g/2}\boldsymbol{c} \tag{49}$$

で結ばれている．そしてヘッシアン行列 $D^2V(\boldsymbol{c})$ の固有値λに対して，Kowalevski 指数ρを求める 2 次方程式は

$$\rho^2-(2g+1)\rho+g(g+1)(1-\lambda)=0 \tag{50}$$

で与えられる．この 2 次方程式の例が (10) や (11) においてϵに実際に依存する因子である．

$k=4$ の場合に積分可能となるために定理 5 で許されるλの値と，対応する Kowalevski 指数ρの間の関係は

$$\begin{aligned}
\lambda &\in \{0,1,3,6,10,\dots\} &&\Rightarrow \quad \rho \in \text{integer}\\
\lambda &\in \left\{\frac{3}{8},\frac{35}{8},\frac{99}{8},\frac{195}{8},\dots\right\} &&\Rightarrow \quad \rho \in \text{integer}/2\\
\lambda &\in \left\{\frac{7}{72},\frac{55}{72},\frac{247}{72},\frac{391}{72},\dots\right\} &&\Rightarrow \quad \rho \in \text{integer}/6
\end{aligned}$$

である．元来の特異点解析におけるナイーブな予想は「積分可能となるためには全ての Kowalevski 指数ρが整数となる」であったが，これは強すぎる．(整数/2) と (整数/6) も許してやる必要があるのである．実際 (31) の V_4においては$\lambda=3/8$ であり，(整数/2) を Kowalevski 指数とする積分可能系である．第 3 の系列 (整数/6) に対応する積分可能系の例は現在のところ知られていない．一方でこの主張は「積分可能となるためには全ての Kowalevski 指数は有理数となる」ことを示した定理 1 を，はるかに強力にするものである．

参考文献

[1] Kimura, T. (1969) On Riemann's Equations which are Solvable by Quadrature, *Funkcialaj Ekvacioj* **12**, 269-281.

[2] Morales-Ruiz, J.J. and Ramis, J.P. (1997) A Note on the Non-integrability of Some Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential, *Preprint*.

[3] Morales-Ruiz, J.J. and Ramis, J.P. (1998) Galoisian Obstruction to Integrability of Hamiltonian Systems, *Preprint*.

[4] Ramani, A., Dorizzi, B. and Grammaticos, B. (1982) Painlevé Conjecture Revisited, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1539-1541.

[5] Ramani, A., Grammaticos, B. and Bountis, T. (1989) The Painlevé Property and Singularity Analysis of Integrable and Non-integrable Systems, *Phys. Rep.* **180**, 159-245.

[6] Yoshida, H. (1987) A criterion for the Non-existence of an Additional Integral in Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential, *Physica* **D29**, 128-142.

[7] Yoshida, H. (1989) A Criterion for the Non-existence of an Additional Analytic Integral in Hamiltonian Systems with N-degrees of Freedom, *Phys. Lett.* **A141**, 108-112.

[8] Yoshida, H. (1998) A New necessary Condition for the Integrability of Hamiltonian Systems with a Two Dimensional Homogeneous Potential, *Preprint*.

[9] Ziglin, S.L. (1983) Branching of Solutions and Nonexistence of First Integrals in Hamiltonian Mechanics, *Functional Anal. Appl.* **16**, 181-189, and **17**, 6-17.

[10] 大貫義郎・吉田春夫（1994）岩波講座現代の物理学 1「力学」, 岩波書店.